17/12/2018

Μαθημα 11ο

ΑΕΣΔΕ

▸ Επαναληψη του προηγουμενου μαθηματος

■ Ευσταθεια των RK

Εστω οτι εχουμε δυο διακριτα ΠΑΤ που δινουν τις προσεγγισεις y^n, $n=0,1,\dots,N-1$ και $y^{n,i}$, $i=1,2,\dots,q$ καθως και το z^n, $n=0,1,\dots,N-1$ και $z^{n,i}$, $i=1,2,\dots,q$ τοτε δυο $\max|y^n-z^n| \le C_1|y^0-z^0| + \frac{C_2}{h}\max_n|p^n|$

Για ευσταθεια αρκει να πουμε οτι το $\max|p^n|=0$ τοτε

$$\max|y^n-z^n| \le C_1|y^0-z^0|, \quad C' = LC\sum_1^q|b_i|, \quad C_1 = e^{C'(b-a)}$$

■ Ταξη ακριβειας των RK [ή απλως ταξη]

Λεγεται ο μεγαλυτερος εκθετης p, για τον οποιο, για ολα τα προβληματα που θεωρουμε, υπαρχει σταθερα $\tilde{C}$ που εξαρταται απο το y και την f αλλα δεν εξαρταται απο το h τ/ω $\max|\delta^n| \le \tilde{C}\, h^{p+1}$

$$RK\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ταξη ακριβειας σημαινει οτι μιλω για ολικο σφαλμα

■ Σφαλμα Συνεπειας ή Τοπικο Σφαλμα → Αναλυτική - Αριθμητική

Συμβολιζω ως εξης: $|\delta^n| = |y(t^{n+1}) - y^{n+1}| = |y(t^{n+1}) - (y^n + h\sum_i b_i f(t^{n,i}, \tilde{y}^{n,i}))|$

οπου $\tilde{y}^{n,i} = y^n + h\sum a_{ij} f(t^{n,j}, \tilde{y}^{n,j})$

Μπορω να προσεγγισω την αναλυτική με Taylor:

$$y(t^{n+1})\Big|_{t^n} \simeq y(t^n) + h\,y'(t^n) + \frac{h}{2!}\,y''(t^n) + \dots$$

Θεωρημα Εκτιμηση σφαλματος της RK

Εστω οτι ισχυει η συνθηκη Lipschitz για την f και f και y'

Ειναι <u>ομαλες συναρτησεις</u> (→ δηλ ειναι C^∞), με γ τ/ω $\gamma = L \max_{i=1,\dots,q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ και

$h_0 > 0$ τ/ω $\gamma h_0 \leq 1$ και $0 < h \leq h_0$.

Θεωρουμε τη μεθοδο RK που εχει ταξη p, δηλ. $\max_n |\delta^n| \leq \tilde{C} h^{p+1}$

Τοτε ΝΔΟ $\max_n |y(t^n) - y^n| \leq \frac{\tilde{C}}{c'} [e^{c'(b-a)} - 1] h^p$

οπου $c' = L C \sum |b_i|$, $\tilde{C}$ ανεξαρτητο απο το h

Αποδειξη (SOS)

Εχουμε αρχικα τη μεθοδο RK

$$\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

Απο γνωστη προταση εχουμε ($\cancel{|y^0 - y(a)|} \to 0$, $y^0 = y(a)$)

$$\max |y(t^n) - y^n| \leq C_1 |y^0 - y(a)| + \frac{C_2}{h} \max_n |\delta^n|$$

$$\Rightarrow \max |y(t^n) - y^n| \leq \frac{C_2}{h} \max_n |\delta^n| \leq \frac{C_2 \tilde{C}}{h} h^{p+1} \Rightarrow$$

$\max_n |y(t^n) - y^n| \leq C_2 \tilde{C} \cdot h^p$ οπου $C_2 = \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'}$, $c' = L C \sum |b_i|$ και

$\tilde{C}$ που δεν εξαρταται απο το h

 # ΑΣΚΗΣΗ 1 #

Μια μεθοδος RK ειναι ταξης ακριβειας $p \geq 1 \iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$

Τοτε η RK ειναι συνεπης.

 # ΛΥΣΗ #

Θελουμε ΝΔΟ $\delta^n = O(h^2)$ {η ακριβεια της μεθοδου ειναι 1, δηλ. το σφαλμα ταξης 2}

$\delta^n = O(h^2) \iff \sum_i b_i = 1$

$\tilde{y}^{n,i} = y^n + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,i}, \tilde{y}^{n,i})$

$\delta^n = [y(t^n) + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, \tilde{y}^{n,i})] - y(t^{n+1})$

Εχουμε οτι $\tilde{y}^{n,i} = y(t^n) + O(h)$, $t^{n,i} = t^n + O(h)$

η μεγιστη τιμη του $t^{n,i} = t^n + 2h$ τα $t^{n,i}$ ειναι μεταξυ t^n και t^{n+1}

t^n "ζουνε" τα $t^{n,i}$ t^{n+1} οσο γι'αυτο ταξης $O(h)$ και οχι $O(h^2)$

(*) Εχω $O(h^2)+O(h^2)=O(2h^2)=O(h^2)$ Δεν επηρεάζει το 2 μπροστά για την τάξη

Μέσω Taylor έχω ότι:

$f(t^{n,i}, y^{n,i}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$

άρα (1): $\delta^n = [y(t^n) + h\sum b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})] - y(t^{n+1}) =$

$= [y(t^n) + h\sum b_i (f(t^n, y(t^n)) + O(h))] - y(t^{n+1}) =$

$= [y(t^n) + h\sum b_i \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \underbrace{h\sum b_i O(h)]}_{O(h^2)} - y(t^{n+1}) =$

$= \cancel{y(t^n)} + h\sum b_i f(t^n, y(t^n)) + O(h^2)^{(*)} - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + O(h^2)] =$

$= h\, y'(t^n)(\sum b_i - 1) + O(h^2)$

Έχουμε λοιπόν $\delta^n = h\, y'(t^n)(\sum_i b_i - 1) + O(h^2)$

αν το $\sum_i b_i \neq 1$ τότε $\delta^n = O(h)$, όμως εμείς θέλουμε $\delta^n = O(h^2)$ άρα το $\sum_i b_i = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 2Η $\boxed{\text{SOS}}$

Ν.Δ.Ο η RK που περιγράφεται από το $\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$, έχει τάξη ακριβώς ένα $(p=1)$

ΛΥΣΗ

Η μέθοδος RK είναι συνεπής αφού $b_1 = 1$ άρα η τάξη $p \geq 1$ (είναι μεταξύ του 1 και 2)

$y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^n + \frac{h}{3}, y^{n,1})$, $t^{n,1} = t^n + \frac{1}{3}h = t^n + h/3$ → Υπολογισμένο Αριθμητικά

$y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{3}, y^{n,1})$, οπότε $\delta^n = \underbrace{[y(t^n) + hf(t^n + \frac{h}{3}, y^{n,1})]}_{y^{n+1}} - \underbrace{y(t^{n+1})}_{\text{Αναλυτική}}$

Taylor στο t^n

Παρατηρούμε ότι $y^{n,1} = y(t^n) + O(h) \Rightarrow f(t^n + \frac{h}{3}, y^{n,1}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$

$\Rightarrow \delta^n = [y(t^n) + h(f(t^n, y(t^n)) + O(h))] - y(t^{n+1}) =$

$= [y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + O(h^2)] - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

$\delta^n = [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h f(t^n, y(t^n))} + O(h^2)] - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + O(h^2)]$

$\Rightarrow \delta^n = O(h^2) \Rightarrow p \geq 1$ όμως εγώ θέλω ισο με ένα

Θα χρησιμοποιήσω ένα πχ για νδο είναι ακριβώς 1

Θεωρούμε ένα παράδειγμα $\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Η αναλυτικη λυση ειναι $y(t) = t^2$

Τοτε $\delta^n = y(t^n) + h f(t^n + \frac{h}{3}) - y(t^{n+1}) = (t^n)^2 + h\, 2(t^n + h/3) - (t^n + h)^2 = -\frac{1}{3}\delta^n$

$|\delta^n| = \frac{1}{3} h^2$ οποτε εχουμε οτι το $p=1$

$\boxed{\text{αν το σφαλμα } 2^{ης} \text{ ταξης} \Rightarrow \text{η ακριβεια της μεθοδου } 1^{ης} \text{ ταξης}}$